



TITLE:

# Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equation(Topology and Geometry of Harmonic Maps)

AUTHOR(S):

内藤, 久資

---

CITATION:

内藤, 久資. Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equation(Topology and Geometry of Harmonic Maps). 数理解析研究所講究録 1987, 626: 96-114

ISSUE DATE:

1987-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99978>

RIGHT:

Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equation

名大理 内藤 久貴 (Hisashi Naito)

§ 1. Introduction.

幾何学において, いくつかの重要な対象が変分原理によって特徴づけられている。例えば, Yang-Mills 接続, Yamabe の問題, Harmonic map がそうである。ここでは, harmonic map, 特にその安定性を考えることにする。

以下本稿では,  $(M, g), (N, h)$  は compact closed Riemann 多様体とする。

初めに, harmonic map の定義と基本的な定理である Eells-Sampson の定理について述べる。

$f: M \rightarrow N$ ; smooth map に対して,  $f$  の energy density  $e(f)$  と total energy  $E(f)$  を次のように定義する。

$$e(f) = \frac{1}{2} |df|^2 = \frac{1}{2} g^{ij} h_{\alpha\beta}(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}$$

$$E(f) = \int_M e(f) d\mu_M.$$

$f: M \rightarrow N$ ; smooth map が harmonic map であるとは,

$f$  が汎関数  $E$  の停留点であることと定義する。

この定義により,  $f$  が harmonic map であることと,  $f$  が  $E$  の Euler-Lagrange 方程式をみたすこととは同値であることがわかる。そこで,  $E$  の Euler-Lagrange 方程式を計算すると,

$$\Delta f = 0$$

$$(\Delta f)^\alpha = g_{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - M_{ij}^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + N_{\beta\gamma}^\alpha(f) \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} \right\}$$

となり, これは二階半線型楕円型方程式系である。

harmonic map の例としては以下のものがある。

- 1)  $M$  上の調和関数
- 2)  $M$  上の測地線
- 3)  $M$  の isometry, 特に恒等写像は harmonic map.
- 4) Kähler manifold の間の (anti-) holomorphic map
- 5)  $f: M \rightarrow N$  を isometric immersion とすると,

$$f: \text{harmonic map} \iff f: \text{minimal}$$

- 6) conformal map
- 7)  $f: M_1 \times M_2 \rightarrow N$  がそれぞれの変数について

$$\text{harmonic map} \Rightarrow f: \text{harmonic map}$$

- 8)  $G$  を両側不変な計量をもつ Lie 群とすると,

$$\text{掛算 } \mu: G \times G \rightarrow G \text{ は harmonic map}$$

- 9) Hopf fibration  $S^3 \rightarrow S^2, S^7 \rightarrow S^4, S^{15} \rightarrow S^8$

は harmonic map

以上の例の他に, harmonic map の存在定理として, 基本的と考えられるものは, 次の Eells-Sampson の定理である。

Theorem (J. Eells - J. H. Sampson [3], 1964)

$N_K$  ( $N$  の断面曲率)  $\leq 0$  とすると,  $C^\infty(M, N)$  の各 homotopy 類には, 少なくとも 1 つの harmonic map が存在する。

さらに, 次の意味での一意性がある。

Theorem (P. Hartmann [6], 1967)

(1)  $f_0, f_1$  を  $C^\infty(M, N)$  の同じ homotopy 類に属する harmonic maps とすると,  $f_0$  と  $f_1$  は harmonic maps の family  $\{f_s\}_{0 \leq s \leq 1}$  を通して homotopic

(2)  $N_K < 0$  とすると, 以下の (i), (ii) を除いて各 homotopy 類にはただ一つの harmonic map が存在する。

(i)  $f_0$  が constant map ならば  $f_1$  もそう

(ii)  $f_0(M)$  が  $N$  の closed geodesic  $\gamma$  になるとき,

$f_1(M)$  もそうで,  $r$  を rotation とした時,

$f_1 = r \circ f_0$  となる。

さて, Eells-Sampson の定理は次の半線型熱方程式を解くことによつて得られる。

$$(E.S.) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \infty) \\ f = f_0 & \text{on } M \times \{0\} \end{cases}$$

この方程式を Eells - Sampson の方程式と呼ぶことにする。

つまり, (E.S.) の時間  $t$  に関する大域解の存在を示し,

$t \rightarrow +\infty$  で解が harmonic map に収束することを示せば, 上

に述べた定理を示すことができる。

一方, 汎関数  $E$  のオス変分公式は次で与えられている。

Theorem (R. T. Smith [16], 1975)

$f: M \rightarrow N$ ; harmonic map での  $E$  の Hessian は

$$Hf(v, w) = \int_M \langle \Delta^f v - \text{Trace}^N R(df, v) df, w \rangle d\mu_M$$

$^N R$  は  $N$  の曲率テンソル,  $v, w \in \Gamma(f^{-1}TN)$

$J_f(v) = \Delta^f v - \text{Trace}^N R(df, v) df$  を  $f$  での Jacobi

operator と呼ぶ

このオス変分公式によって, harmonic map の安定性の定義を  
することができる。

Definition

harmonic map  $f$  の Index とは,

$\text{Index}(f) = \{J_f \text{ の負の固有空間の次元} \}$

$f$  の Nullity とは

$$\text{Null}(f) = \dim(\ker Jf).$$

ここで,  $Jf$  は elliptic で  $M$  は compact だから,

$$\text{Index}(f), \text{Null}(f) < +\infty \quad \text{となる。}$$

さらに, harmonic map  $f$  が stable, weakly stable

とは, それぞれ,  $\text{Index}(f) = \text{Null}(f) = 0, \text{Index}(f) = 0$

をみたすこととする。

したがって,  $NK \leq 0$  とすると, 全ての harmonic map が (weakly) stable となることがわかる。そこで, 次の問題を考えよう。

### Problem.

harmonic map  $F$  が (weakly) stable であるとき,

$F$  と "十分近い"  $f_0$  を初期値とする (E.S.) は  $w = +\infty$

までの解を持つか?

さらに, その解は,  $t \rightarrow +\infty$  とした時, harmonic map

$F$  に収束するか?

この問題に対する一つの解答が, 次に述べる今日の主定理です。

### Theorem. (H. Naito [7])

$F: M \rightarrow N$  を stable harmonic map とする。

$m > \frac{1}{2} \dim M + 2$  に対して, ある正数  $\varepsilon$  が存在して,

$$\|F - f_0\|_{H^m(M, N)} < \varepsilon$$

をみたせば,  $f_0$  を初期値とする (E.S.) の解  $F$  が,

$$C^0([0, \infty); H^m(M, N)) \cap C^{1/2}([0, \infty); H^{m-1}(M, N))$$

に存在し,

$$\|f(\cdot, t) - F\|_{H^m(M, N)} \leq Ce^{-\beta t} \quad (C, \beta > 0)$$

をみたす。ここで  $\|\cdot\|_{H^m(M, N)}$  は  $N \subset \mathbb{R}^p$  と考えた時の Sobolev space  $H^m(M, \mathbb{R}^p)$  の norm。

#### Remark

この定理は, 多様体が real analytic の時には, Leon Simon [14] によって得られていた。

L. Simon の結果については, section 2 で述べる。

#### § 2. Known results.

この section では, Eells-Sampson の方程式について, 知られている結果をいくつか述べることにする。

(J. Eells - J. H. Sampson [3], 1964)

$NK \leq 0$  の時, 任意の  $f_0 \in C^\infty(M, N)$  に対して,  $f_0$  を初期値とする (E.S.) は  $\omega = +\infty$  までの解を持ち,  $t \rightarrow +\infty$  の時,  $C^\infty$ -topology で harmonic map に収束する。

(R. Hamilton [5], 1975)

$(M, g)$ ,  $(N, h)$  を境界のある compact Riemann 多様体で,  
 $\partial N$  は convex かつ  $K \leq 0$  とする。次の Eells-Sampson 方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times \{0\} \\ f = h & \text{on } \partial M \times [0, \omega) \end{cases}$$

は  $f_0|_{\partial M} = h$  をみたす  $f_0 \in C^\infty(M, N)$  に対して  $\omega = +\infty$  までの解を持ち,  $t \rightarrow +\infty$  の時,  $C^\infty$ -topology で harmonic map に収束する。

(S. Nishikawa [9], 1980)

$(M, g)$ ,  $(N, h)$  を境界のある compact Riemann 多様体で,  
 $\partial M, \partial N$  は convex かつ  $K \leq 0$  とする。次の Eells-Sampson 方程式の Neumann 問題

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } M \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } M \times \{0\} \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial M \times [0, \omega) \end{cases}$$

は  $\frac{\partial f_0}{\partial \nu} = 0$  をみたす  $f_0 \in C^\infty(M, N)$  に対して  $\omega = +\infty$  までの解を持ち,  $t \rightarrow +\infty$  の時,  $C^\infty$ -topology で harmonic map に収束する。



(S. Nishikawa [10], 1981)

$M = N \times_{\varphi} K$ ,  $M' = N' \times_{\varphi'} K'$  を compact Riemann 多様体の warped product;  $N, N'$  は境界を持ち,  $K, K'$  は境界はないとする。さらに  $\partial N$  は convex かつ  $NK \leq 0$ ,

$F: K \rightarrow K'$  は constant energy density をもつ

harmonic map,  $f_0: N \rightarrow N'$ ; smooth map とする。

$u: \partial M \times [0, \infty) \rightarrow M'$ ; smooth かつ  $t$  に independent

$u = f_0 \times F$  on  $\partial M \times (0)$  であるとき,

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U & \text{on } M \times [0, \infty) \\ U = f_0 \times F & \text{on } M \times (0) \\ U = u & \text{on } \partial M \times [0, \infty) \end{cases}$$

は global solution  $U: M \times [0, \infty) \rightarrow M'$  を持ち,

$\partial M \times (0)$  を除いたところで smooth。

(L. Simon [14], 1983)

$(M, g)$ ,  $(M', g')$  を compact real analytic Riemann

多様体とした時,  $f$  を locally energy minimizing な

map とすると,  $f$  と  $H^m$ -topology ( $m > \frac{1}{2} \dim M + 3$ ) で

十分近い初期値をもつ (E.S.) は  $\omega = +\infty$  までの解を

もち,  $t \rightarrow +\infty$  の時,  $f$  と同じ energy を持つ

harmonic map に収束する。(c.f. L. Simon [15], J. Jost [4])

(M, g); compact Riemann surface, (N, h); compact

Riemann 多様体に対して,  $f_0 \in H^1(M, N)$  を初期値に

とつ (E.S.) は,  $u = +\infty$  までの解を持ち, 高々有限

個の点;  $\{(\alpha_\ell, T_\ell) \in M \times [0, \infty); 1 \leq \ell \leq L\}$  で

$$\limsup_{T \rightarrow T_\ell, T < T_\ell} E_R(f(\cdot, T); \alpha_\ell) > \varepsilon^1, \forall R \in (0, R_0]$$

をみたす点  $\{ \}$  を除いて,  $M \times [0, \infty)$  上

regular, ただし,  $E_R(u, \alpha) = \int_{B_R(\alpha)} e(u) d\mu_M$ .

### Remark

以上の定理で得られた解は, 全て unique.

### § 3. 非線型発展方程式の導出.

この section では, 主定理を証明するための準備として, ある条件の下に (E.S.) の解を構成することと同値となる発展方程式を導く。

定理の中での仮定,  $F$  が stable harmonic map であるということを使うために, (E.S.) を  $F^{-1}TN$  の section に対する方程式に書き直すことを考える。なぜなら,  $F$  が stable であることを示す情報は, Jacobi operator, 即ち  $\Gamma(F^{-1}TN)$  に対する operator で表現されているからである。

そのために次の事実を考えよう。

$f_1, f_2 : M \rightarrow N$  が

$$|f_1, f_2| := \sup_{x \in M} d_N(f_1(x), f_2(x)) < \rho_N(N \text{ の単射半径})$$

をみたせば,  $v \in \Gamma(f^{-1}TN)$  が存在して,

$$f_2(x) = \exp_{f_1(x)} v(x) \text{ と書くことができる。}$$

上の指数写像は  $N$  の指数写像である。

この事実を使って,  $\Delta(\exp_{F(x)} v(x))$  を計算する。これは, 指数写像を local coordinate で 2 次まで Taylor 展開して得たものである。

$$\Delta(\exp_F v) = \Delta F - J_F(v) + \psi(v)L(v) + P(v)$$

ここで,  $J_F$  は Jacobi operator で 2 階楕円型,  $\psi(v)L(v)$  は 2 階の operator で,  $v$  を fix して,  $u \mapsto \psi(v)L(u)$  は linear,  $P$  は 1 階の 2 次以上の多項式型の operator である。

したがって (E.S.) の解  $f_t$  を  $|F, f_t| < \rho_N$  の仮定の下で構成することは, 次の発展方程式 (\*) の解を構成することと同値となる。

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -J(u) + \psi(u)L(u) + P(u) & \text{on } M \times [0, \omega) \\ u = u_0 & \text{on } M \times \{0\} \end{cases}$$

ただし, (E.S.) の初期値  $f_0$  に対して,

$$f_0(x) = \exp_{F(x)} u_0(x) \text{ である。}$$

以下では,  $F; M \longrightarrow N$  は stable harmonic map と仮定する。

$\Gamma(F^{-1}TN)$  上の  $L^2$ -内積を

$$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_M g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta d\mu_M$$

で定義すると,  $J_F$  は  $L^2$ -self adjoint になる。

$F$  は stable だから,  $\exists \eta > 0$  s.t.

$$\langle J_F(u), u \rangle_{L^2} \geq \eta \langle u, u \rangle_{L^2}.$$

さらに,  $\Gamma(F^{-1}TN)$  上の Sobolev space の norm を,

$$\|u\|_{H^m(\Gamma(F^{-1}TN))} = \langle J_F^m(u), u \rangle_{L^2}$$

で定義する。以下  $\|\cdot\|_{H^m(\Gamma(F^{-1}TN))}$  を  $\|\cdot\|_m$  と書く。

さらに, 次の命題を得ることができる。

Proposition 3.1.

$m > \frac{1}{2} \dim M + 2$  に対して, ある正数  $\varepsilon$  が存在して,

$\|v\|_m < \varepsilon$  ならば,  $T(v)(\cdot) = J_F(\cdot) - \phi(v)L(\cdot)$  は

$H^m$ -positive operator.

i.e.  $\exists \rho > 0$  s.t.  $\langle T(v)(u), u \rangle_{H^m} \geq \rho \langle u, u \rangle_{H^m}$ .

Proposition 3.2.

$k > \frac{1}{2} \dim M + 1$  に対して,  $\|v\|_{k+1}, \|w\|_{k+1} < 1$  ならば

$$\|P(v) - P(w)\|_k \leq C \|v - w\|_{k+1} (\|v\|_{k+1} + \|w\|_{k+1})$$

が成り立つ。

## § 4. Proof of theorem.

Section 3 での議論によって, (E.P.) の解を構成する替りに, (\*) の解を構成すればよいことがわかったわけだが, この section では, (\*) の解を Banach space  $B_\infty$  で構成しよう。

ここで  $B_{T_0}$  ( $0 < T_0 \leq \infty$ ) は以下のように定義される。

$$B_{T_0} := C^0([0, T_0]; H^m(\Gamma(F^{-1}TN))) \cap C^{1/2}([0, T_0]; H^{m-1}(\Gamma(F^{-1}TN)))$$

であって, その norm  $\|\cdot\|_{T_0}^*$  は

$$\|u\|_{T_0}^* := \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|u(t)\|_m + \sup_{0 \leq t, s \leq T_0} \frac{\|u(t) - u(s)\|_{m-1}}{|t-s|^{1/2}} \quad \text{である。}$$

次に述べる逐次近似によって, 解を構成しよう。

$$(4.1.) \quad v_0 = u_0$$

$$(4.2.) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial t} + J(v_{j+1}) = \varphi(v_j) L(v_{j+1}) + P(v_j) \\ v_{j+1}(0) = u_0 \end{cases} \quad (j \geq 0)$$

(4.2.) は次の (4.3.) と同値。

$$(4.3.) \quad v_{j+1}(t) = U_j(t, 0) v_0 + \int_0^t U_j(t, \xi) P v_j(\xi) d\xi.$$

ここで,  $U_j$  は  $-T(v_j)$  を generator とする, 発展作用素で,  $-T(v_j)$  は section 3 で定義した Sobolev spaces の内積に関して self adjointかつ positive であることによって, 次の estimates を持つ。

$$(4.4.) \quad \|U_j(t, \xi)v\|_m \leq \|v\|_m$$

$$(4.5.) \quad \|U_j(t, \xi)v\|_m \leq \frac{C}{(t-\frac{1}{3})} \|v\|_{m-2}$$

まず, (4.1.) - (4.2.) で得られた  $\{v_j\}$  に対する, a priori 評価を示そう,

Proposition 4.1.

$m > \frac{1}{2} \dim M + 2$  に対し  $\mathbb{Z}$ ,

$$K_j(T_0) = K_j = \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|v_j(t)\|_m \quad \text{とおくと,}$$

$K_0 T_0^{1/2} \leq C$  ならば,  $K > 0$  が存在して,

$$K_j < K \quad (j \geq 0) \quad \text{かつ} \quad K T_0^{1/2} \leq C \quad \text{となる.}$$

さらに,  $K_0 \rightarrow 0$  とすれば,  $K \rightarrow 0$  とできる.

(proof)

(4.3.) を評価すると,

$$\begin{aligned} \|v_{j+1}(t)\|_m &\leq \|U_j(t, 0)v_0\|_m + \int_0^t \|U_j(t, \xi)Pv_j(\xi)\|_m d\xi \\ (4.6.) \quad &\leq \|v_0\|_m + C \int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^{1/2}} \|Pv_j(\xi)\|_{m-1} d\xi \\ &\leq \|v_0\|_m + C \int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^{1/2}} \|v_j(\xi)\|_m^2 d\xi \end{aligned}$$

となるから,

$$(4.7.) \quad K_{j+1} \leq K_0 + C T_0^{1/2} K_j^2$$

簡単な計算によつて,  $C K_0 T_0^{1/2} \leq 1/4$  ならば,

$\exists K > 0$  s.t.  $K_j > K$  かつ  $C K T_0^{1/2} \leq 1/2$  を示すことができる.

また,  $k_0 \rightarrow 0$  とすると,  $k \rightarrow 0$  ととれることは,  
上の計算からわかる。  $\square$

この *a priori estimate* と, M. Potier-Ferry [13] による発展方程式の解の構成法を使って, まず *local solution* の存在, 次にそこで得られた解を接続して, *global solution* の存在を示す。

#### Theorem 4.2.

ある正の数  $\eta$  と  $T_0$  が存在して,  $k_0 < \eta$  ならば, (4.1) の *unique* な解が  $B_{T_0}$  に存在する。

(proof)

初めに,  $(v_{j+1}(t) - v_j(t))$  を評価しよう。

$$\begin{aligned} v_{j+1}(t) - v_j(t) &= (U_j(t, 0) - U_{j-1}(t, 0))v_0 \\ &\quad + \int_0^t (U_j(t, \xi)Pv_j(\xi) - U_{j-1}(t, \xi)Pv_{j-1}(\xi))d\xi \end{aligned}$$

したがって, 右辺第一項の評価は次のようになる。

$$(4.8) \quad \|(U_j(t, 0) - U_{j-1}(t, 0))v_0\|_m \leq C \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^* \|v_0\|_m$$

この *estimate* は, 発展作用素の *generator* の性質によるもの。[13, proposition 6]

右辺第二項の評価は次の通り,

$$\begin{aligned} &\| (U_j(t, \xi)Pv_j(\xi) - U_{j-1}(t, \xi)Pv_{j-1}(\xi)) \|_m \\ &\leq \| (U_j(t, \xi) - U_{j-1}(t, \xi))Pv_j(\xi) \|_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|v_{j-1}(t, \xi)(Pv_j(\xi) - Pv_{j-1}(\xi))\|_m \\
(4.9.) \quad & \leq C \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^* \|Pv_j(\xi)\|_{m-1} (t-\xi)^{-\theta} \\
& + \|Pv_j(\xi) - Pv_{j-1}(\xi)\|_{m-1} (t-\xi)^{-1/2} \\
& \leq C \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^* \{K^2(t-\xi)^{-\theta} + 2K(t-\xi)^{-1/2}\} \\
& \text{ここで } \frac{1}{2} < \theta < 1.
\end{aligned}$$

よって, (4.8) と (4.9) をあわせて,

$$\begin{aligned}
(4.10.) \quad \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_m & \leq C(K_0 + K^2 T_0^{1-\theta} + 2K T_0^{1/2}) \\
& \times \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^*
\end{aligned}$$

が得られた。

一方, 一般に  $u \in H^m$  に対して, 次のような interpolation property がある。

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - u(s)\|_{m-1} \\
(4.11.) \quad & \leq |t-s|^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|u(t)\|_m^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \frac{\partial}{\partial t} u(t) \right\|_{m-2}^{1/2} \\
& t, s \in [0, T_0]
\end{aligned}$$

この性質を使うために,  $\frac{\partial}{\partial t} v_{j+1}(t) - \frac{\partial}{\partial t} v_j(t)$  を評価する。

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial}{\partial t} v_{j+1}(t) - \frac{\partial}{\partial t} v_j(t) \right\|_{m-2} \\
& \leq \|Pv_j(t) - Pv_{j-1}(t)\|_{m-2} \\
& + \|T(v_j(t))v_{j+1}(t) - T(v_{j-1}(t))v_j(t)\|_{m-2} \\
& \leq 2K \|v_j(t) - v_{j-1}(t)\|_{m-1} \\
& + C \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|_m
\end{aligned}$$



$$\leq C \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^* (2K + K_0 + K^2 T_0^{1-\theta} + 2K T_0^{\frac{1}{2}})$$

となるから, (4.11.), (4.10) によって,

$$(4.12.) \quad \|v_{j+1} - v_j\|_{T_0}^* \leq C(K_0, K, T_0) \|v_j - v_{j-1}\|_{T_0}^*$$

を得る。ここで  $C$  は  $K_0, T_0 \rightarrow 0$  とすれば,

$C \rightarrow 0$  となる定数。

よって,  $C < 1$  となるように,  $K_0, T_0$  をとれば,

$\{v_j(t)\}$  は  $B_{T_0}$  で収束する。それを  $v(t)$  と書くと,

$v(t)$  は (\*) の unique な solution となる。  $\square$

### Theorem 4.3.

ある正数  $\eta$  が存在して,  $K_0 < \eta$  ならば, (\*) は  $B_\infty$  に unique な解を持つ。

(proof)

theorem 4.2. では,  $K_0 < \eta$  の時,  $[0, T_0]$  での solution  $v(t)$  を構成したが, この  $v(t)$  に対して,

$$\|v(t)\|_m < \eta \quad \forall n \geq 1, \forall t \in [0, nT_0]$$

であることを示せばよい。そのために,

$$|v|_{t_1} = \sup_{0 \leq t \leq t_1} \|e^{Bt} v(t)\|_m$$

とおき,

$$\exists \xi > 0 \text{ s.t. } \forall t_1 > 0, \|v_0\|_m \leq \xi \text{ ならば } |v|_{t_1} \leq C \|v_0\|_m$$

を示せばよい。ここで  $\beta$  は  $\beta \in (0, P)$  であって,

$P$  は proposition 3.1. の constant。

$v$  は次の式をみたしている。

$$(4.13.) \quad v(t) = U(t, 0)v_0 + \int_0^t U(t, \xi) P v(\xi) d\xi$$

作用素  $U$  は次の estimates をみたす。

$$\|U(t, \xi)v\|_m \leq e^{-\beta t} \|v\|_m$$

$$\|U(t, \xi)v\|_m \leq \frac{Ce^{-\beta t}}{(t-\xi)} \|v\|_{m-2}$$

したがって, (4.13.) は,

$$|v|_{t_1} \leq \|v_0\|_m + C \int_0^{t_1} (t-\xi)^{-1/2} e^{-\beta t} |v|_{t_1}^2 d\xi$$

$$\leq \|v_0\|_m + C_0 |v|_{t_1}^2$$

と評価できて,

$$K_0 \leq C_0/4 \quad \text{とすれば,}$$

$$|v|_{t_1} \leq CK_0 \quad \text{とできて,}$$

求める評価

$$\|v(t)\|_m \leq CK_0 e^{-\beta t} \quad t \in [0, \infty)$$

を得る。

よって (\*) は  $B_\infty$  に unique な解をもち, その解は,

exponential order で decay することがわかった。□

以上によつて,  $f_0$  を初期値に持つ (E.5) の解は,

$$f(x, t) = \exp F(x) v(x, t)$$

と表わされ,  $C^{1/2}([0, \infty); H^{m-1}(M, N)) \cap C^0([0, \infty); H^m(M, N))$  に入る。さらに,  $\|f(x, t) - F\|_m \leq C e^{-\beta t}$  を示すことができ, 解  $f$  は, harmonic map  $F$  に exponential order で decay することがわかる。

## References

- [1] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps. *London Math. Soc.* **10** (1978), 1-68.
- [2] J. Eells and L. Lemaire, "Selected Topics on harmonic maps." C. B. R. N. Regional Conference Series, 1980.
- [3] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mapping of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109-160.
- [4] J. Jost, "Harmonic Mapping Between Riemannian Manifolds." Proc. Centre Math. Anal., Australian National Univ. 1983.
- [5] R. Hamilton, "Harmonic maps of manifolds with boundary." L. N. M. **471**, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1975.
- [6] P. Hartmann, On homotopic harmonic maps. *Canad. J. Math.* **19** (1967), 673-687.
- [7] H. Naito, Asymptotic behavior of solutions to Eells-Sampson equations near stable harmonic maps. preprint.
- [8] H. Naito, in preparation.
- [9] S. Nishikawa, On the Neumann problem for the nonlinear parabolic equation of Eells-Sampson and harmonic mappings. *Math. Ann.* **249** (1980), 177-190.
- [10] S. Nishikawa, On the existence of global solutions of the nonlinear parabolic equation of Eells-Sampson over product manifolds. *Proc. A. M. S.* **82** (1981), 369-373.
- [11] S. Nishikawa, "Harmonic map の存在と応用 ." Report on Global Analysis, 1980.
- [12] A. Pazy, "Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations." New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag 1983.
- [13] M. Poiter-Ferry, The linearization principle for the stability of solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Ratio. Mech. Anal.* **77** (1981), 301-330.
- [14] L. Simon. Asymptotic for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problem. *Ann. Math.* **118** (1983), 525-571.
- [15] L. Simon, Asymptotic behavior of minimal submanifolds and harmonic maps. *Proc. Sympo. pure Math.* **44** (1986), 369-377.
- [16] R. T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings. *Proc A. M. S.* **47** (1975), 229-236.
- [17] M. Struwe, On the evolution of harmonic mappings of Riemann surfaces. *Comm. Math. Helv.* **60** (1985), 558-581.